www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

INSTITUT SUPERIEUR DE GESTION — MATHEMATIQUES

CONCOURS D'ADMISSION DE 1990 — DUREE : 4 heures 30 - COEFFICIENT : 8

OPTION ECONOMIQUE

LE SUJET COMPREND QUATRE EXERCICES INDEPENDANTS

EXERCICE I.

On considère la suite réelle définie par $(u_0, u_1) \in \mathbf{R}^2$ et pour $n \geq 2$ par la relation (1) :

$$(1) \qquad u_n = u_{n-1} - 2u_{n-2}$$

1°) Montrer que la suite $(u_n + u_{n-1})$ est géométrique et exprimer $u_n + u_{n-1}$ en fonction de u_0, u_1 et n.

2°) Montrer de même que la suite $(u_n - 2u_{n-1})$ est géométrique et exprimer $u_n - 2u_{n-1}$ en fonction de u_0, u_1 et n.

En déduire u_n en fonction de u_0, u_1 et n.

3°) Soit la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Montrer pour tout n entier naturel que A^n est de la forme : $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$

pour des suites (a_n) et (b_n) qui vérifient (1).

4°) En déduire, pour tout entier n, les valeurs de a_n et b_n.

EXERCICE II.

On se propose d'étudier l'existence de valeurs et vecteurs propres pour la matrice à éléments réels :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & b \end{pmatrix} \qquad \text{avec } b \neq 0.$$

1°) Ecrire le système donnant les composantes (x, y, z) des vecteurs propres associés à une valeur propre k de A.

2°) Montrer que $k = 0$ est valeur propre et que l'espace propre associé est de dimension 1. En donner une base.

3°) On cherche maintenant s'il existe une valeur propre $k \neq 0$. Montrer qu'alors nécessairement $z \neq 0$ et que k est solution d'une équation du second degré ayant 2 racines distinctes.

4°) Prouver alors que les deux valeurs trouvées sont effectivement valeurs propres en donnant pour chacune d'elles un vecteur propre associé.

5°) La matrice A est-elle diagonalisable ?

.../...

EXERCICE III.

Pour $x > -1$, on définit f par : $f(0) = 1/2$ et pour $x \neq 0$ par : $x^2 f(x) = x - \text{Log}(1+x)$ où Log désigne la fonction logarithme népérien.

1°) Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

2°) Donner, en les justifiant, les limites de f en -1 et en $+\infty$.

3°) a) Montrer que f est dérivable sur $]-1 ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$
b) Calculer alors la valeur de $f'(x)$ et la mettre sous la forme $g(x)/x^3$
c) Montrer que f est dérivable en 0.

4°) Dériver g et montrer, que pour tout $x > -1$ et $x \neq 0$, $g(x) < 0$.

5°) Dresser le tableau des variations de f et en donner une représentation graphique avec une unité de 5 cm.

6°) Calculer, pour $x > 0$, une primitive de f.

EXERCICE IV.

QUESTION PRELIMINAIRE (utile dans la dernière question de l'exercice)

On admettra que, pour $|x| < 1$:

la série de terme général nx^n converge et a pour somme $x/(1-x)^2$ et
la série de terme général n^2x^n et a pour somme $x(x+1)/(1-x)^3$.

Soit a un réel de $]0 ; 1[$ et X une variable aléatoire à valeurs dans N dont la loi est définie par : $\forall\ n \in \mathbf{N}$, $P[x = n] = (1-a)a^n$.

a) Calculer l'espérance de X
b) Calculer l'espérance de X^2
c) Calculer la variance de X.

EXERCICE

Un joueur décide d'effectuer une partie de PILE ou FACE avec les règles suivantes :

- il a gagné dès que *pile est sorti 2 fois de plus que face:*
- il a perdu dès que *face est sorti 2 fois de plus que pile:*
- la partie n'est interrompue que *lorqu'une des deux éventualités précédentes s'est réalisée.*

La pièce est *dissymétrique* : la probabilité d'obtenir PILE à chaque jet est p $(0 < p < 1)$, celle de FACE est $q = 1 - p$.

1°) Soit n un entier naturel. Montrer que la probabilité pour que la partie contienne plus de 2n jets de pièce est α^n avec $\alpha = 2pq$

2°) Soit U la probabilité que le joueur gagne la partie et V la probabilité qu'il la perde.

Montrer que : $U = p^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$ et $V = q^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$

Calculer U et V.

3°) Soit Y la variable aléatoire qui prend comme valeurs le nombre de jets contenus dans la partie.

a) Montrer que Y ne peut prendre que des valeurs paires supérieures ou égales à 2.

b) Calculer pour $n > 0$, $P[Y = 2n]$ en fonction de α (on remarquera que $(p+q)^2 = 1$).

c) En appliquant la question préliminaire à $(Y/2) - 1$, calculer l'espérance et la variance de Y.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail